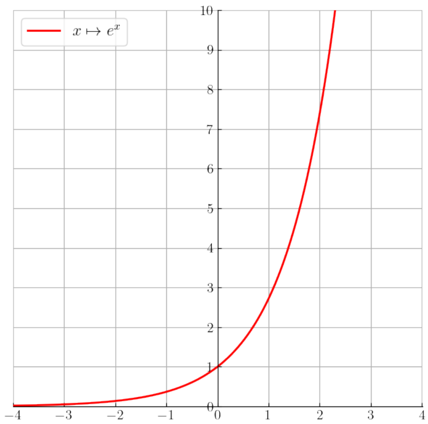
Chapitre D2 – Mathématiques appliquées à la physique

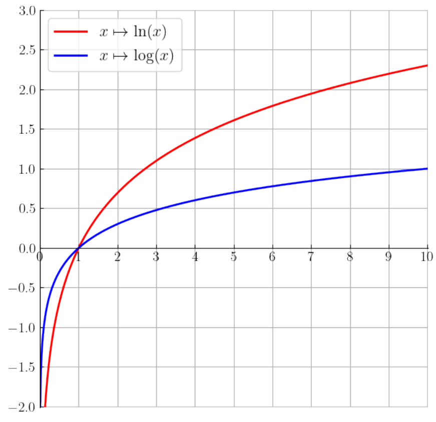
Ce cours ne se substitue pas à un cours de mathématiques mais il rassemble l'essentiel des compétences mathématiques utiles à la résolution de problèmes physiques. En particulier, ce cours manque de rigueur et les hypothèses sous-jacentes à certaines formules ne sont pas explicités. La raison est que bien souvent en physique, les objets sont suffisamment « sympathiques » pour satisfaire toutes ces hypothèses.

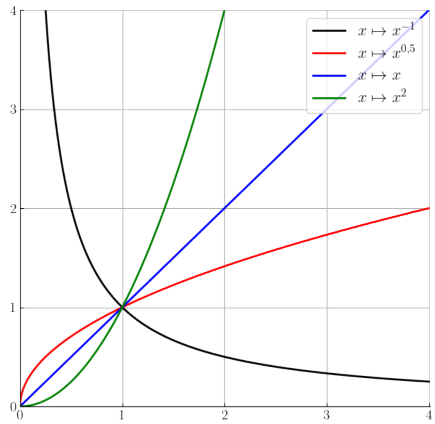
I) Fonctions

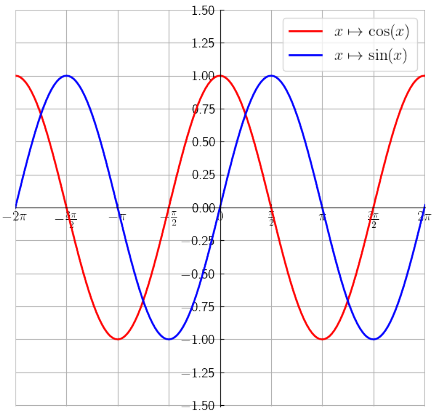
1) Représentation graphique des fonctions usuelles

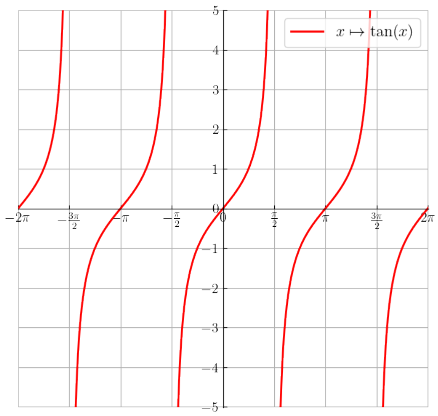
Connaître les graphes ci-dessous.











2) Dérivée

Soit une fonction $f(t)$. En physique, la dérivée de cette fonction ce note : $\boxed{f'(t) = \dfrac{df}{dt}}$

D'où vient cette notation ? En physique, d signifie « petite différence de » et s'appelle **différentielle**. Ainsi, dt correspond à une petite variation du temps t et df correspond à la petite variation de la fonction f lors de cet intervalle de temps dt.

Exemple : considérons la fonction $f(t) = t^2$

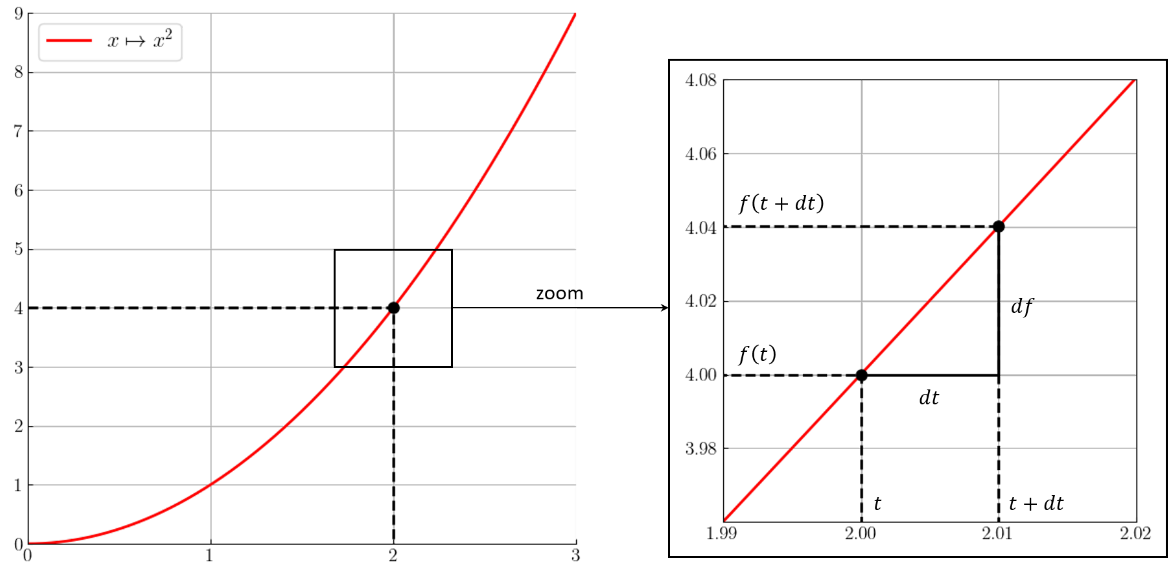
$$\frac{df}{dt} = \frac{f(t+dt) - f(t)}{dt} = \frac{(t+dt)^2 - t^2}{dt} = \frac{t^2 + 2t\,(dt) + (dt)^2 - t^2}{dt} = 2t + dt$$

Par « petite différence de », on entend en réalité « $dt \to 0$ ». Ainsi,

$$\lim_{dt\to 0}\left(\frac{df}{dt}\right) = 2t = f'(t)$$

On retrouve bien que la dérivée de t^2 est $2t$.

Graphiquement, dt et df se visualisent de la manière suivante (exemple pour : $f(t) = t^2$; $t = 2$ et $dt = 0{,}01$).



Puisque dt est très petit, la courbe est visuellement assimilable à sa tangente. La pente de cette droite, c'est-à-dire le taux d'accroissement de la fonction, vaut : $\dfrac{df}{dt}$

Par définition, la dérivée est la limite du taux d'accroissement lorsque $dt \to 0$.

$$f'(t) = \lim_{dt\to 0}\left(\frac{df}{dt}\right)$$

Application numérique :

$$\begin{cases} dt = 0{,}01 \\ df \simeq 0{,}04 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \frac{df}{dt} \simeq 4 = f'(2)$$

On retrouve la même conclusion avec les approches calculatoire et graphique : une **dérivée** est un rapport de deux **différentielles**.

Table des dérivées usuelles

Connaître les dérivées suivantes.

$f(x)$	$k \in \mathbb{R}$	x^n	$\cos(x)$	$\sin(x)$	e^x	$\ln(x)$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$-\sin(x)$	$\cos(x)$	e^x	$\dfrac{1}{x}$

Dérivée d'une fonction composée

Avec la notation différentielle, il est possible de calculer simplement la dérivée d'une fonction composée.

Exemple :

Soit $\theta(t) = \omega t$ une fonction du temps (ω est constant) et $s(\theta) = S_0 \sin(\theta)$ une fonction de θ (S_0 est constant). Calculons la dérivée de s par rapport à t.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \times \frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{ds}{d\theta} = \omega \times S_0 \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{ds}{dt} = \omega S_0 \cos(\omega t)}$$

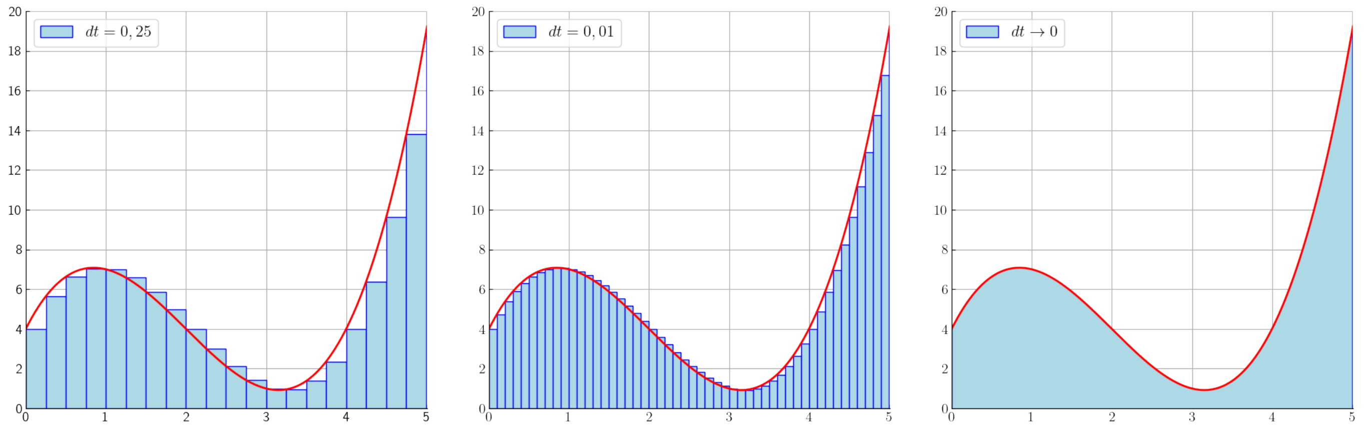
3) Primitive et intégrale

Une **primitive** d'une fonction $f(t)$ est une fonction F dérivable dont f est la dérivée :

$$\frac{dF}{dt} = f(t)$$

Connaître la table des dérivées usuelles, c'est donc connaître la table des primitives usuelles.

L'**intégrale** d'une fonction $f(t)$ entre deux bornes a et b correspond à l'aire sous la courbe entre les bornes a et b. Pour calculer cette aire, on somme (symbole $\int$ qui ressemble à un long « S ») les aires de rectangles de hauteur $f(t)$ et de largeur dt, pour t allant de a à b. L'aire d'un tel rectangle vaut : $d\mathcal{A} = f(t)\,dt$. Dans la limite où $dt \to 0$, la somme devient rigoureusement égale à l'aire sous la courbe.



Le théorème fondamental de l'analyse fait le lien entre aire sous la courbe et primitive de la fonction :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

4) Développements limités

La **formule de Taylor** permet de déterminer la valeur d'une fonction en un point x proche de a, connaissant la valeur de la fonction et de ses dérivées au point a.

$$f(x) = \underbrace{f(a)}_{\text{ordre 0}} + \underbrace{\frac{(x-a)}{1!}\, f'(a)}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2!}\, f^{(2)}(a)}_{\text{ordre 2}} + \underbrace{\frac{(x-a)^3}{3!}\, f^{(3)}(a)}_{\text{ordre 3}} + \dots$$

Un **développement limité** (DL) d'une fonction à l'ordre n correspond à la formule de Taylor tronquée à l'ordre n. On obtient alors une approximation polynomiale de la fonction. Plus l'ordre est élevé, meilleure est l'approximation. En physique, on s'arrête très souvent au premier ordre non nul.

Connaître les DL suivants.

Fonction	$(1+x)^\alpha$	$\cos(x)$	$\sin(x)$	e^x	$\ln(1+x)$
DL ($x \ll 1$)	$1 + \alpha x$	$1 - \frac{x^2}{2}$	x	$1 + x$	x

5) Valeur moyenne d'une fonction périodique

Soit $f(t)$ une fonction T-périodique. On appelle **valeur moyenne** la grandeur :

$$\boxed{\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt} \qquad \forall\ t_0 \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de la grandeur mesurée par un multimètre en mode DC.

Exemples à connaître :

$$\boxed{\langle\cos\rangle = \langle\sin\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle\cos^2\rangle = \langle\sin^2\rangle = \frac{1}{2}}$$

On appelle **valeur efficace** ou **valeur RMS** (*root mean square*) la grandeur :

$$\boxed{F_{\text{rms}} = \sqrt{\langle f^2(t)\rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\,dt}\qquad \forall\, t_0 \in \mathbb{R}$$

Il s'agit de la grandeur mesurée par un multimètre en mode AC.

Exemples pour un signal harmonique :

$$f(t) = A\,\cos(\omega t) \quad \Rightarrow \quad F_{\text{rms}} = A\sqrt{\langle\cos^2\rangle} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

II) Géométrie

1) Système de coordonnées

En physique, il faut toujours choisir un système de coordonnées adapté au problème.

Coordonnées cartésiennes

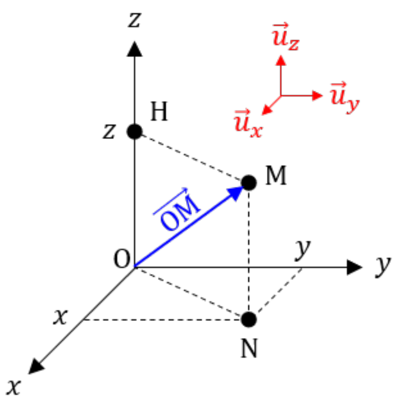
Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$

Vecteur position : $\overrightarrow{\text{OM}} = x\,\overrightarrow{u}_x + y\,\overrightarrow{u}_y + z\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{\text{OM}} = dx\,\overrightarrow{u}_x + dy\,\overrightarrow{u}_y + dz\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u}_x + \dot{y}\,\overrightarrow{u}_y + \dot{z}\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Vecteur accélération : $\overrightarrow{a} = \ddot{x}\,\overrightarrow{u}_x + \ddot{y}\,\overrightarrow{u}_y + \ddot{z}\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$



Coordonnées polaires

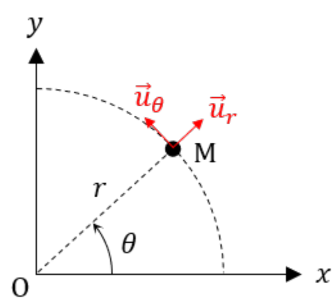
Soit $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$

Vecteur position : $\overrightarrow{\text{OM}} = r\,\overrightarrow{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$

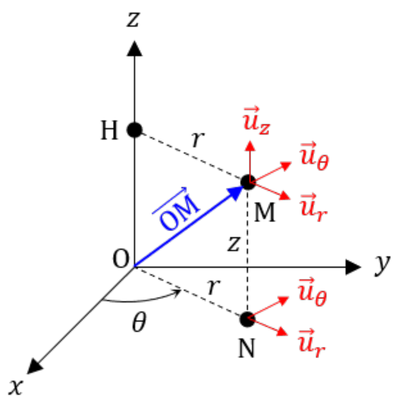
Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{\text{OM}} = dr\,\overrightarrow{u}_r + rd\theta\,\overrightarrow{u}_\theta = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \end{pmatrix}$

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \end{pmatrix}$

Vecteur accélération : $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u}_\theta = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$



Coordonnées cylindriques



Il s'agit de l'union de la base polaire et de l'axe (z) de la base cartésienne.

Soit $r \in \mathbb{R}^+$; $\theta \in [0, 2\pi[$ et $z \in \mathbb{R}$

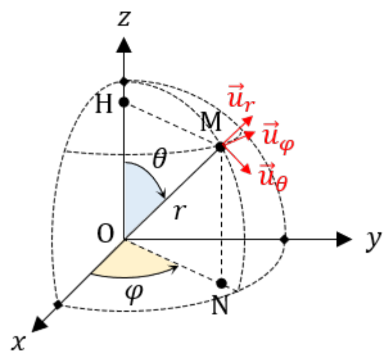
Vecteur position : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u}_r + z\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

Déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{\mathrm{OM}} = dr\,\overrightarrow{u}_r + rd\theta\,\overrightarrow{u}_\theta + dz\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{pmatrix}$

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_\theta + \dot{z}\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

Vecteur accélération : $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \ddot{z}\,\overrightarrow{u}_z = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

Coordonnées sphériques



Soit $r \in \mathbb{R}^+$; $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi[$

Vecteur position : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u}_r = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les vecteurs vitesse et accélération sont admis (démonstration HP).

Vecteur vitesse : $\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u}_r + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_\theta + r\,\sin(\theta)\,\dot{\varphi}\,\overrightarrow{u}_\varphi = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ r\,\sin(\theta)\,\dot{\varphi} \end{pmatrix}$

2) Produit scalaire

Le **produit scalaire** est une opération qui prend deux vecteurs et qui renvoie le nombre :

$$\boxed{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \|\overrightarrow{a}\| \times \|\overrightarrow{b}\| \times \cos\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)}$$

On remarque en particulier que **le produit scalaire est nul si les vecteurs sont orthogonaux**.

Le produit scalaire est une opération **linéaire** et **symétrique** :

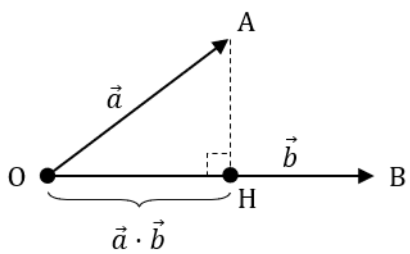
$$\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$$

Le produit scalaire s'écrit également en fonction des coordonnées des vecteurs de la manière suivante :

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Le produit scalaire s'interprète géométriquement comme la projection orthogonale d'un vecteur sur un autre.

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \mathrm{OH}$$

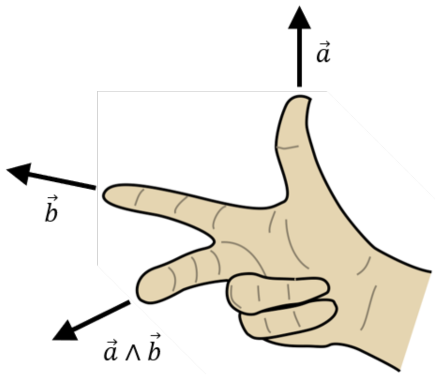


3) Produit vectoriel

Le **produit vectoriel** est une opération qui prend deux vecteurs et qui renvoie le vecteur de norme :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}\right\| = \left\|\overrightarrow{a}\right\| \times \left\|\overrightarrow{b}\right\| \times \left|\sin\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\right)\right|}$$

et dirigé selon la règle de la main droite.



On remarque en particulier que **le produit vectoriel est nul si les vecteurs sont colinéaire**.

Le produit vectoriel est une opération **linéaire** et **antisymétrique** :

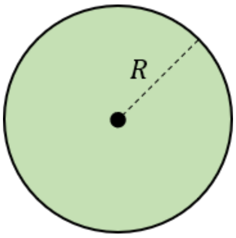
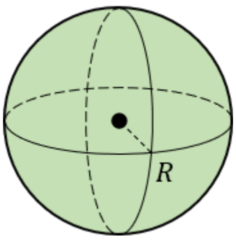
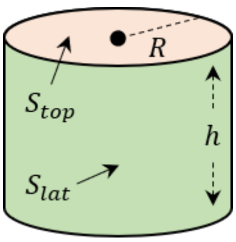
$$\overrightarrow{a} \wedge \left(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right) = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = -\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}$$

Le produit vectoriel s'écrit également en fonction des coordonnées des vecteurs de la manière suivante :

$$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

4) Longueurs, aires et volumes

Connaître les périmètres, surfaces et volumes suivants.

Objet	Illustration	Périmètre	Surface	Volume
Cercle / Disque		$P = 2\pi R$	$S = \pi R^2$	
Sphère / Boule			$S = 4\pi R^2$	$V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Cylindre			$\begin{cases} S_{lat} = 2\pi R h \\ S_{top} = \pi R^2 \end{cases}$	$V = \pi R^2 h$

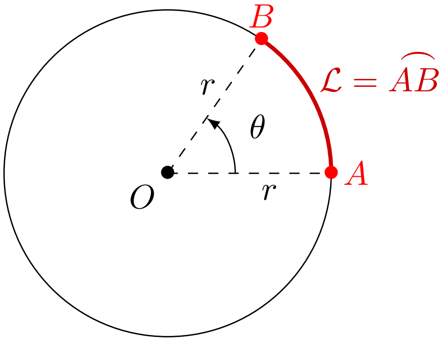
III) Trigonométrie

1) Le radian

Soit un cercle de centre O et de rayon r avec A et B sont deux points du cercle.

L'arc de cercle $\mathcal{L} = \widehat{\mathrm{AB}}$ est proportionnel au produit du rayon r et de l'angle θ. Lorsque θ est exprimer en radian, la constante de proportionnalité vaut 1.

$$\boxed{\widehat{\mathrm{AB}} = r\theta \quad \text{avec :} \quad \theta \text{ en radian}}$$



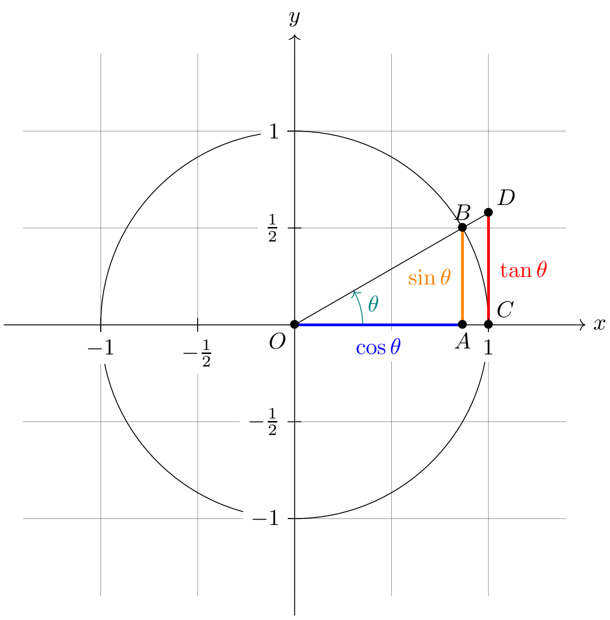
2) Cercle trigonométrique

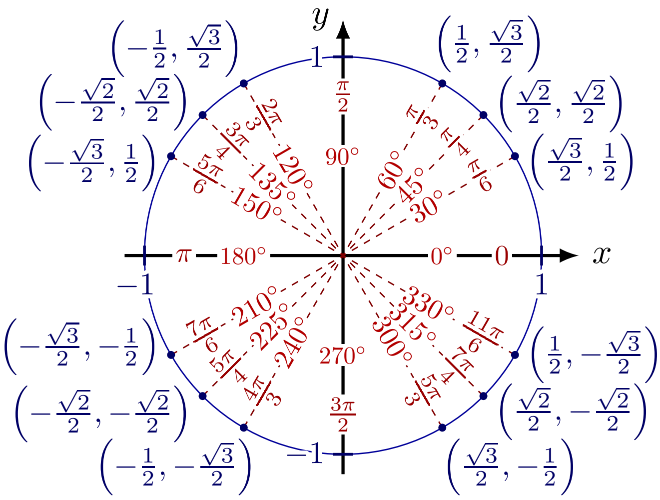
Considérons le cercle de rayon OB = 1. On peut lire graphiquement la valeur du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle θ comme indiqué sur la figure de gauche.

Rappel : CAH SOH TOA

$$\cos(\theta) = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}} = \mathrm{OA} \qquad \sin(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}} = \mathrm{AB} \qquad \tan(\theta) = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OA}} = \mathrm{CD}$$

Connaître les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ indiquées sur la figure de droite (les multiples de 30° et 45°).





3) Formules trigonométriques

Parfois rappelées, mais parfois non, il et important de maîtriser les formules trigonométriques.

Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore dans le triangle OAB assure que :

$$\mathrm{OA}^2 + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OB}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \quad \forall\, \theta}$$

Formules d'addition

Maîtriser parfaitement ces formules.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) & \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) & \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{array}}$$

Autres relations

Ces relations se déduisent des formules d'addition.

Poser $b = \pm\pi/2$ ou $b = \pm\pi$ pour obtenir les formules ci-dessous.

$$\boxed{\begin{array}{lll} \cos\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(a) & \cos\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin(a) & \cos(a\pm\pi) = -\cos(a) \\ \sin\left(a+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(a) & \sin\left(a-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos(a) & \sin(a\pm\pi) = -\sin(a) \end{array}}$$

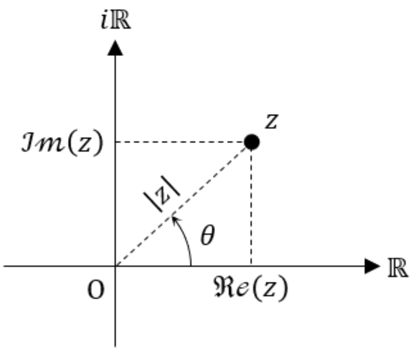
Poser $b = a$ pour obtenir les formules ci-dessous.

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)}$$

En combinant la formule du $\cos(2a)$ avec le théorème de Pythagore, on obtient :

$$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}}$$

4) Nombres complexes



Un nombre complexe peut s'écrire de deux manières :

$$z = \mathcal{R}e(z) + i\ \mathcal{I}m(z) = |z|\, e^{i\theta} \quad \text{avec :} \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\ \sin(\theta)$$

Connaître les formules de somme et de produit de nombres complexes.

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \Big[\mathcal{R}e(z_1) + \mathcal{R}e(z_2)\Big] + i\Big[\mathcal{I}m(z_1) + \mathcal{I}m(z_2)\Big] \\ z_1 \times z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{cases}$$

5) Signal complexe

Soit un signal harmonique d'**amplitude** S_0 et de **phase à l'origine** ϕ. Le signal s'écrit donc :

$$s(t) = S_0\ \cos(\omega t + \phi)$$

On associe à ce signal réel un signal complexe en remplaçant le cosinus par une exponentielle complexe.

$$\underline{s}(t) = S_0\ e^{i(\omega t+\phi)} = S_0 e^{i\phi} \times e^{i\omega t} = \underline{S_0}\ e^{i\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{S_0} = S_0 e^{i\phi}$$

La grandeur $\underline{S_0}$ s'appelle l'**amplitude complexe** du signal. Il s'agit d'un nombre qui peut se représenter dans le plan complexe.

Le signal complexe permet de certaines opérations mathématiques (somme, dérivation, intégration) plus aisément qu'avec le signal réel. On retrouve le signal réel en prenant la partie réel du signal complexe.

$$s(t) = \mathcal{R}e\Big(\underline{s}(t)\Big) \qquad \frac{d\underline{s}(t)}{dt} = i\omega \times \underline{s}(t) \qquad \int \underline{s}(t)\, dt = \frac{\underline{s}(t)}{i\omega}$$

IV) Équations différentielles

1) Définitions

Une **équation différentielle** (ED) est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemple :

$$a \times f''(t) + b \times f'(t) + c \times f(t) = g(t) \quad \text{où :} \quad g(t) \text{ est connue}$$

On appelle **équation homogène** la même équation différentielle sans le second membre, ie. en posant $g(t) = 0$.

L'ED est dite **linéaire** si toute combinaison linéaire de solutions de l'équation homogène est également une solution de l'équation homogène. C'est le cas dans l'exemple car seule $f(t)$ et ses dérivées apparaissent. Cela n'aurait pas été le cas si l'ED avait comporté $(f'(t))^2$, $\sin(f(t))$, $\sqrt{f''(t)}$, etc.

On appelle **ordre** de l'ED, l'ordre de la dérivée la plus élevée qui apparaît dans l'équation. Dans l'exemple, l'ordre est 2.

L'ED est à **coefficients constants** lorsque tous les coefficients (a, b, c) sont des constantes.

Dans le cours de physique, les équations différentielles que nous allons rencontrer seront le plus souvent linéaires, à coefficients constants, d'ordre 1 ou 2 et avec second membre soit constant (ie. $g(t) = G_0$) soit sinusoïdal (ie. $g(t) = G_0 \cos(\omega t)$). Dans ce cas, la solution s'écrit :

$$f(t) = f_{\text{SEH}}(t) + f_{\text{SP}}(t)$$

2) Détermination de la solution l'équation homogène (SEH)

Soit une équation différentielle homogène linéaire à coefficients constants.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \times f^{(n)}(t) = 0$$

Les solutions sont des fonctions exponentielles : $f(t) = e^{rt}$. Injectons cette solution dans l'ED. Après division par e^{rt}, on obtient le **polynôme caractéristique** de l'ED.

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \times r^n = 0$$

Nous avons donc à ce stade transformé l'équation différentielle en une équation polynomiale, beaucoup plus simple à résoudre. Notons r_n les racines de ce polynôme. Le nombre de solution est égal au degré du polynôme, donc à l'ordre de l'ED.

Puisque l'ED est linéaire, la solution générale est une combinaison linéaire des solutions trouvées.

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n \, e^{r_n t} \quad \text{avec :} \quad \{A_n\} \text{ des constantes}$$

Appliquons la méthode aux 4 cas classiques rencontrés en physique.

ED d'ordre 1

Soit $\tau > 0$. Forme canonique et polynôme caractéristique :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad r + \frac{1}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = -\frac{1}{\tau}}$$

On en déduit la forme générale de la SEH.

$$\boxed{f_{\text{SEH}}(t) = A \, e^{-t/\tau}}$$

Remarque :

Le signe « + » dans l'équation différentielle assure la stabilité de la solution (ie. une solution qui ne diverge pas). C'est toujours le cas en physique.

ED d'ordre 2 (type : oscillateur harmonique)

Soit $\omega_0 > 0$. Forme canonique et polynôme caractéristique :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2\ f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \pm\ i\omega_0}$$

On en déduit la forme générale de la SEH.

$$f_{\text{SEH}}(t) = A_1\ e^{i\omega_0 t} + A_2\ e^{-i\omega_0 t} = \underbrace{[A_1 + A_2]}_{=\,A} \cos(\omega_0 t) + \underbrace{i\,[A_1 - A_2]}_{=\,B} \sin(\omega_0 t) \quad \text{avec :} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

On est en physique, les solutions obtenues se doivent d'être réelles. Il faut donc avoir : $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$ mais $A, B \in \mathbb{R}$. On en déduit la forme des solutions.

$$\boxed{f_{\text{SEH}}(t) = A\ \cos(\omega_0 t) + B\ \sin(\omega_0 t) = F_0\ \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{avec :} \quad \begin{cases} A, B \in \mathbb{R} \\ F_m \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad \phi \in \,]-\pi, \pi] \end{cases}}$$

Montrons que les deux formes sont équivalentes.

$$F_m\ \cos(\omega_0 t + \phi) = \underbrace{F_m\ \cos(\phi)}_{A} \cos(\omega_0 t) \underbrace{-\ F_m\ \sin(\phi)}_{B} \sin(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} A = F_m\ \cos(\phi) \\ B = -F_m\ \sin(\phi) \end{cases}}$$

Réciproquement, avec le résultat précédent, on obtient :

$$A^2 + B^2 = F_m^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_m = \sqrt{A^2 + B^2} \quad \text{et} \quad \tan(\phi) = -\frac{B}{A}}$$

En physique, on préférera très souvent la forme $f_{\text{SEH}}(t) = A\ \cos(\omega_0 t) + B\ \sin(\omega_0 t)$ car elle permet généralement de déterminer plus facilement des constantes A et B à l'aide des conditions initiales.

ED d'ordre 2 (type : équilibre instable)

Soit $\omega_0 > 0$. Forme canonique et polynôme caractéristique :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} - \omega_0^2\ f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{r = \pm\ \omega_0}$$

On en déduit la forme générale de la SEH (les deux formes sont équivalentes).

$$\boxed{f_{\text{SEH}}(t) = A\ \text{ch}(\omega_0 t) + B\ \text{sh}(\omega_0 t) = C\ e^{-\omega_0 t} + D\ e^{\omega_0 t}}$$

<u>Remarque</u> :

La solution est instable, ie. qu'elle diverge dans le temps, ce qui n'arrivent jamais en physique. Il y a deux manières de lever ce paradoxe, selon la situation physique considérée.

- Cette ED n'est valable que pour un bref instant, donc t ne peut pas tendre vers l'infini, donc la solution reste bornée.
- Cette ED est valable jusqu'à $t \to \infty$, dans ce cas $B = 0$ pour assurer la stabilité physique.

ED d'ordre 2 (type : oscillateur amorti)

Soit $\omega_0 > 0$ et $Q > 0$. Forme canonique et polynôme caractéristique :

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\ \frac{df}{dt} + \omega_0^2\ f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\ r + \omega_0^2 = 0$$

On pose Δ le discriminant de ce polynôme.

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\left(\lambda^2 - \omega_0^2\right) \quad \text{avec :} \quad \boxed{\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}}$$

Les racines du polynôme caractéristiques, et donc la forme générale de la SEH, dépend si signe de Δ.

$$\begin{cases} \left(\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda < \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q > \dfrac{1}{2}\right) & \Rightarrow \quad r = -\lambda \pm i\,\Omega \\ \left(\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q < \dfrac{1}{2}\right) & \Rightarrow \quad r = -\lambda \pm \Omega \\ \left(\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \omega_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = \dfrac{1}{2}\right) & \Rightarrow \quad r = -\omega_0 \end{cases} \qquad \text{avec :} \quad \boxed{\Omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \lambda^2|}}$$

Par des calculs similaires aux deux autres ED d'ordre 2 vues précédemment, on obtient finalement la forme générale de la SEH selon la valeur de Q.

$$\boxed{\begin{array}{lll} Q > \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & f_{\text{SEH}}(t) = e^{-\lambda t}\Big[A\,\cos(\Omega t) + B\,\sin(\Omega t)\Big] = F_m\;e^{-\lambda t}\,\cos(\Omega t + \phi) \\ Q < \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & f_{\text{SEH}}(t) = e^{-\lambda t}\Big[A\,\text{ch}(\Omega t) + B\,\text{sh}(\Omega t)\Big] = e^{-\lambda t}\Big[C\;e^{-\Omega t} + D\;e^{\Omega t}\Big] \\ Q = \dfrac{1}{2} & \Rightarrow & f_{\text{SEH}}(t) = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t} \end{array}}$$

Remarque : les deux signes « + » dans l'équation différentielle assure la stabilité de la solution.

3) Détermination de la solution particulière (SP)

On rappelle que : $f(t) = f_{\text{SEH}}(t) + f_{\text{SP}}(t)$

Pour l'ensemble des ED vues ci-dessus, $f_{\text{SEH}}(t \gg \tau) \to 0$ où τ est le temps caractéristique du **régime transitoire**. On note tout de même que $\tau = \infty$ pour l'oscillateur harmonique, mais nous pouvons ignorer ce cas qu'il s'agit d'un système physique idéalisé sans aucune perte d'énergie.

On en déduit que pour des temps $t \gg \tau$, la solution de l'ED est égale à la solution particulière. On parle alors de **régime permanent** ou de régime établit.

La solution particulière « ressemble » au second membre. En particulier :

- si $g(t) = G_0$ (une constante), alors $f_{\text{SP}}(t) = F_0$ est également constante. Le régime permanent est donc un **régime stationnaire**.
- si $g(t) = G_0\,\cos(\omega t)$, alors $f_{\text{SP}}(t) = F_0\,\cos(\omega t + \phi)$ est également sinusoïdal de même pulsation ω. Le régime permanent est donc un **régime sinusoïdal**.

Application : soit un oscillateur amorti d'équation : $\dfrac{d^2 f}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dfrac{df}{dt} + \omega_0^2\,f(t) = g(t)$

Cas d'un régime stationnaire

On pose : $g(t) = G_0$. On cherche une solution de la forme : $f_{\text{SP}}(t) = F_0$. On injecte cette solution dans l'ED.

$$\omega_0^2\,F_0 = G_0 \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{G_0}{\omega_0^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{SP}}(t) = \frac{G_0}{\omega_0^2}}$$

Remarque :

On aboutit donc au résultat suivant : $g(t) = \omega_0^2\,f_{\text{SP}}$. Par un calcul identique sur les autres ED, on aboutit, pour les ED avec second membre constant, aux formes canoniques suivantes :

ED d'ordre 1	$\dfrac{df}{dt} + \dfrac{f(t)}{\tau} = \dfrac{f_{\text{SP}}}{\tau}$
ED d'ordre 2 (type : oscillateur harmonique)	$\dfrac{d^2 f}{dt^2} + \omega_0^2\,f(t) = \omega_0^2\,f_{\text{SP}}$
ED d'ordre 2 (type : équilibre instable)	$\dfrac{d^2 f}{dt^2} - \omega_0^2\,f(t) = -\omega_0^2\,f_{\text{SP}}$
ED d'ordre 2 (type : oscillateur amorti)	$\dfrac{d^2 f}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\,\dfrac{df}{dt} + \omega_0^2\,f(t) = \omega_0^2\,f_{\text{SP}}$

Cas d'un régime sinusoïdal

On pose : $g(t) = G_0 \cos(\omega t)$. On cherche une solution de la forme : $f_{\text{SP}}(t) = F_0 \cos(\omega t + \varphi)$. On attribut alors à chaque signal réel un signal complexe.

$$\underline{g}(t) = G_0\ e^{i\omega t} \qquad \text{et} \qquad \underline{f}(t) = F_0\ e^{i(\omega t+\varphi)} = \underline{F_0}\ e^{i\omega t} \quad \text{avec :} \quad \underline{F_0} = F_0\ e^{i\varphi}$$

Trouver l'expression de $\underline{F_0}$, c'est trouver la solution particulière. On injecte les signaux complexes dans l'ED. Après simplification par $e^{i\omega t}$, on obtient :

$$\left[-\omega^2 + i\ \frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right]\underline{F_0} = G_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{F_0} = \frac{G_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\ \dfrac{\omega\omega_0}{Q}}}$$

On a finalement :

$$F_0 = \left|\underline{F_0}\right| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(F_0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{SP}}(t) = \left|\underline{F_0}\right| \cos(\omega t + \arg(F_0))}$$

4) Méthode de la séparation des variables

Une équation différentielle et dite à variables séparables lorsqu'il possible de réarranger l'ED pour avoir à gauche du signe égal une fonction de f uniquement et à droite du signe égal une fonction de t uniquement. Dans ce cas, il est possible d'intégrer chaque membre pour résoudre l'ED.

Exemple n°1 : EDL d'ordre 1

On considère l'ED suivante, où l'on peut séparer les variables.

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{df}{f} = -\frac{dt}{\tau}$$

On intègre cette équation entre l'instant initial et un instant quelconque :

$$\int_0^t \frac{df}{f} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \Big[\ln(f)\Big]_0^t = -\frac{1}{\tau}\Big[t\Big]_0^t \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{f(t)}{f(0)}\right) = -\frac{t}{\tau} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(t) = f(0) \times e^{-t/\tau}}$$

On retrouve bien la solution vue précédemment.

Exemple n°2 : réaction chimique avec une cinétique d'ordre 2

On considère l'ED suivante, où C représente la concentration d'un réaction dans une réaction chimique de cinétique d'ordre 2.

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dC}{C^2} = -k\ dt$$

On intègre cette équation entre l'instant initial et un instant quelconque :

$$\int_0^t \frac{dC}{C^2} = -k\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{C}\right]_0^t = -k\Big[t\Big]_0^t \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C(t)} - \frac{1}{C_0} = -kt \quad \Rightarrow \quad \boxed{C(t) = \frac{C_0}{1 - kC_0 t}}$$

5) Cas des équations différentielles de Newton

Dernier cas que nous allons régulièrement rencontrer en physique : les équations différentielles de Newton. Elles sont de la forme :

$$\ddot{x} + f(x) = 0$$

Il faut multiplier par $\dot{x}$ puis intégrer. On obtient alors une **intégrale première du mouvement**, ie. une grandeur physique conservée tout au long de l'expérience. Cette méthode ne permet pas de résoudre l'ED mais fournit une relation entre x et $\dot{x}$, ce qui permet tout de même d'obtenir de précieuses informations sur l'évolution du système.

Exemple : ED du pendule

On considère l'ED suivante, où θ représente qu'un pendule fait avec la verticale.

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \times \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}\ddot{\theta} + \omega_0^2 \times \dot{\theta}\ \sin(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2 \times \cos(\theta)\right] = 0$$

Puisque la dérivée de cette fonction est nulle, alors la fonction est constante et égale à sa valeur dans les conditions initiales.

$$\boxed{\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega_0^2 \times \cos(\theta) = cte}$$

Cette relation donne un lien direct entre la position du pendule et sa vitesse angulaire.

6) Bilan – fiche mémo

Voici une fiche bilan concernant les équations différentielles appliquée à la physique.

Équation différentielle

Est-elle linéaire ? — Oui → Les coefficients sont-ils constants ? — Oui → **EDL à coefficients constants**

Non → Une indication est-elle donnée dans l'énoncé ? — Oui → Suivre l'indication ; Non → **Méthode de la séparation des variables**

EDL à coefficients constants

♥ Mettre l'équation sous **forme canonique** ♥

♥ Donner la solution de l'équation homogène (**SEH**) ⟼ donne la durée et la forme du **régime transitoire** ♥

Type : circuits RC, RL

$$\frac{df}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = g(t) \quad \longrightarrow \quad f_{\text{SEH}}(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Type : oscillateur harmonique

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \omega_0^2\, f(t) = g(t) \quad \longrightarrow \quad f_{\text{SEH}}(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = F_m \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Type : équilibre instable

$$\frac{d^2f}{dt^2} - \omega_0^2\, f(t) = g(t) \quad \longrightarrow \quad f_{\text{SEH}}(t) = A\,\mathrm{ch}(\omega_0 t) + B\,\mathrm{sh}(\omega_0 t) = C\,\mathrm{e}^{-\omega_0 t} + D\,e^{\omega_0 t}$$

Type : oscillateur amorti

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{df}{dt} + \omega_0^2\, f(t) = g(t)$$

Signe du discriminant ?

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$$

Poser : $\lambda = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \sqrt{|\omega_0^2 - \lambda^2|}$

$$\Delta < 0 \Rightarrow f_{\text{SEH}}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] = F_m\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \phi)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow f_{\text{SEH}}(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\,[A\,\mathrm{ch}(\Omega t) + B\,\mathrm{sh}(\Omega t)] = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left[C\,\mathrm{e}^{-\Omega t} + D\,\mathrm{e}^{\Omega t}\right]$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow f_{\text{SEH}}(t) = (A + Bt)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}$$

Trouver une solution particulière (**SP**) ⟼ décrit le **régime permanant**, de la même « forme » que le forçage $g(t)$

$$f(t) = f_{\text{SEH}}(t) + f_{\text{SP}}(t)$$

$g(t) = G_0 \Rightarrow f_{\text{SP}}(t) = F_0$

$g(t) = G_0\cos(\omega t) \Rightarrow f_{\text{SP}}(t) = F_0\cos(\omega t + \varphi)$

Déterminer les **constantes** à l'aide des **conditions initiales** ou des **conditions aux limites**